Поредното заседание на участниците в майсторските класове 7-8 и 9 – 12 клас в Академията по математика продължава с решаване на диофантови уравнения.

Уравнения, в които се търсят само решения, които са цели числа се наричат *диофантови*. Името е в чест на един от най-големите математици в древността **Диофант**, който е живял през 3 век в Гърция и автор на 13- те книги „Аритметика".

Диофант Александрийски
(на старогръцки: *Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς*) е гръцки математик от Александрия. Роден и живял вероятно през 3 век.
Той често бива наричан „Баща на алгебрата".
Негова е идеята да се използват уравнения в цели числа, наречени в негова чест Диофантови уравнения.

В тази наша среща сме избрали 15 интересни диофантови уравнения. Идеите и реализацията им при решаването им са впечатляващи.

МНОГО ИДЕИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ДИОФАНТОВИ УРАВНЕНИЯ

Задача 1. Да се реши в цели числа уравнението $xy + 3x - 5y = -2$.

Решение: $xy + 3x - 5y = -2 \Leftrightarrow x(y+3) - 5y = -2 \Leftrightarrow x(y+3) - 5y - 15 = -2 - 15$
$$\Leftrightarrow (x-5)(y+3) = -17$$

$$(x-5)(y+3) = -17 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} x-5=-1 \\ y+3=17 \end{array}\right. \\ \left|\begin{array}{l} x-5=-17 \\ y+3=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow (4,14), (-12,-2).$$

Отговор: (4,14), (-12,-2).

Задача 2. Да се реши в цели числа уравнението
$$x! + 12 = y^2.$$

Решение: Ако $x \geq 5 \Rightarrow x! + 12$ завършва на 2, а точните квадрати не завършват на 2, 3, 7 и 8.

Остава да проверим за x = 1, 2, 3 и 4:
Получаваме, че ако $x = 4 \Longrightarrow y = 6$ или $y = -6$.
Решенията са (4,-6) и (4,6).
Отговор: (4,6), (4,-6)**.**

Задача 3. Да се реши в цели числа уравнението

$$2^x + 7 = y^2.$$

Решение:

$$2^x + 7 = y^2 \Leftrightarrow (y+3)(y-3) = 2^x - 2 \Rightarrow 2/(y+3)(y-3) \Rightarrow \boldsymbol{y} \text{ е нечетно число}$$
$$\Rightarrow 4/(y+3)(y-3) \Rightarrow\ 4/2^x - 2, \text{невъзможно!}$$

Уравнението няма решение.
Отговор: $\emptyset$**.**

Задача 4. Да се реши в цели числа уравнението

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

Решение:

$$x + y = x^2 - xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0$$

Разглеждаме полученото като квадратно уравнение относно x:
Дискриминантата е

$$D\ = -3y^2 + 6y + 1 = 4 - 3(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y = 0, 1,2.$$

За получените стойности търсим съответни цели стойности на x като заместваме в уравнението.
Решения са (0,0), (0,1), (1,2), (2,2).
Отговор: (0,0), (0,1), (1,2), (2,2).

Задача 5. Докажете, че уравнението $4x^n + (x+1)^2 = y^2$, относно естествените числа x и y, при n = 1 няма решение.
Решение:

$$4x + (x+1)^2 = y^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 - y^2 = 8 \Leftrightarrow (x+3+y)(x+3-y) = 8$$

Но

$$x + 3 + y \geq 1 + 3 + 1 = 5\ \Rightarrow \left| \begin{matrix} x+3+y = 8 \\ x+3-y = 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow 2y = 7$$

Уравнението следствие няма решение, защото у е естествено число и е невъзможно $2y\ =\ 7$

следователно няма решение и даденото.

Отговор: $\emptyset$.

Задача 6. Да се реши в естествени числа x и y уравнението

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Решение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3y+3x=xy \Leftrightarrow (x-3)(y-3)=9 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x-3=9 \\ y-3=1 \end{array}\right. \\ \left| \begin{array}{l} x-3=3 \\ y-3=3 \end{array}\right. \\ \left| \begin{array}{l} x-3=1 \\ y-3=9 \end{array}\right. \end{array}\right. . \Leftrightarrow (12,4),(6,6),(4,12).$$

Отговор: (12,4), (6,6), (4,12).

Задача 7. Да се реши в естествени числа *x* и *y* уравнението

$$x^3+y^3+1=3xy.$$

Решение:

Известно е тъждеството

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$

Ако $z=1 \Rightarrow$

$$x^3+y^3+1-3xy=\left\{\begin{array}{c}(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x) \\ 0\end{array}\right. \Rightarrow x^2+y^2+1-xy-y-x=0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0 \Rightarrow (1,1).$$

Отговор: (1,1).

Задача 8. Да се реши в цели числа *x* и *y* уравнението $x^2=y^2+2y+13.$

Решение:

$$x^2=y^2+2y+13 \Leftrightarrow x^2=(y+1)^2+12 \Leftrightarrow x^2-(y+1)^2=12$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)(x-y-1)=12 \ \Rightarrow..$$

Решения са $(\pm 4,1),(\pm 4,-3).$

Отговор: (-4,-3), (-4,1), (4,1), (4, -3).

Задача 9. Да се реши в цели числа *x* и *y* уравнението $x^4-2y^2=1.$

Решение: От уравнението следва,че *x* е нечетно, т.е. съществува естествено число n, такова че $x = 2n + 1.$

От

$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$\Rightarrow x^4-1=2n(2n+2)(4n^2+4n+2)$

$$x^4-2y^2=1 \Leftrightarrow 2n(2n+2)(4n^2+4n+2)=2y^2.$$

От последното равенство следва,че y е четно, т.е. съществува естествено число n, такова че $x = 2m$.

$$2n(2n+2)(4n^2+4n+2) = 2y^2 \Leftrightarrow n(n+1)(2n(n+1)+1) = m^2.$$

Последното равенство е изпълнено единствено при n =0 и m =0 $\Longrightarrow$ (1,0).

Отговор: (1,0).

Задача 10. Да се реши в цели числа x и y уравнението $3^x + 7 = 2^y$.

Решение:

$$3^x + 7 \equiv 1(mod\, 3) \Longrightarrow y = 2z\, ;\ \ 3^x + 7 = 2^{2z}$$

$$3^x + 7 = 2^{2z} \ \Leftrightarrow 3^x = 2^{2z} - 7$$

$$2^{2z} - 7 \equiv 1(mod\, 4) \ \Longrightarrow x = 2t$$

Тогава

$$3^x + 7 = 2^y \ \Leftrightarrow 7 = 2^{2z} - 3^{2t} \Leftrightarrow 7 = (2^z - 3^t)(2^z + 3^t) \Longrightarrow 2^z - 3^t = 1, 2^z + 3^t = 7$$
$$\Longrightarrow z = 2, t = 1 \ \Longrightarrow x = 2, y = 4.$$

Отговор: (2,4).

Задача 11. Да се реши в цели числа x и y уравнението $3.2^x + 1 = y^2$.

Решение: $3.2^x + 1 = y^2 \Leftrightarrow 3.2^x = y^2 - 1 \Leftrightarrow 3.2^x = (y-1)(y+1)$.

От $(y+1) - (y+1) = 2 \ \Longrightarrow$ най-големият общ делите на $(y-1)$ и $(y+1)$ е 1 или 2.

Ако най-големият общ делител е 1, тогава x = 0 $\Longrightarrow y \ = \pm\, 2$.

Ако най-големият общ делител е 2, тогава от $3.2^n = (\pm 3.\, 2^{n-1}).(\pm 2) = (\pm 2^n).(\pm 3.2)$ $\Longrightarrow x$ = 3 и x = 4.

Ако x = 3 $\Longrightarrow y \ = \pm\, 5$.

Ако x = 4 $\Longrightarrow y \ = \pm\, 7$.

Отговор: $(0, \pm 2), (3, \pm 5), (4, \pm 7)$.

Задача 12. Да се реши в цели числа x, y и z уравнението $3^x + 4^y = 5^z$.

Решение:

При деление на 3 числата равни на $5^1, 5^2, 5^3, 5^4$, ... дават остатъци 2, 1, 2, 1, …

При деление на 4 числата равни на $4^1, 4^2, 4^3, 4^4, \ldots$ дават остатък 1.
Тогава z е четно число $\Longrightarrow z = 2n, n \in \mathbb{N}$.

При деление на 4 числата равни на $5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$ дават остатък 1.
При деление на 4 числата равни на $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$ дават остатъци 3, 1, 3, 1, ….
Тогава x е четно число $\Longrightarrow x = 2m, m \in \mathbb{N}$.

$$3^x + 4^y = 5^z \Leftrightarrow 3^{2m} + 2^{2y} = 5^{2n} \Leftrightarrow 2^{2y} = (5^n - 3^m)(5^n + 3^m) \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} 5^n - 3^m = 2^{2y-l} \\ 5^n + 3^m = 2^l \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5^n = \frac{1}{2}(2^{2y-l} - 2^l) \\ 3^m = 2^{2y-l-1} - 2^{l-1} \end{array} \right.$$

От $3^m = 2^{2y-l-1} - 2^{l-1} \Longrightarrow l = 1 \Longrightarrow 3^m = 2^{2y-2} - 1 \Leftrightarrow 3^m = (2^{y-1} - 1)(2^{y-1} + 1)$

Получихме, че е произведение на две числа, разликата на които е 2 и двете са степени на тройката, тогава тези множители са 1 и 3 $\Longrightarrow$ y =2$\Longrightarrow x = z = 2$.

Отговор: (2,2,2).

Задача 13. Да се докаже, че уравненията
$x^2 + y^2 = 2003$;
$12x + 5 = y^2$;
$-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$;
$15x^2 - 7y^2 = 9$;
$x^2 - 5y + 3 = 0$;
$8x^3 - 13y^3 = 17$.
нямат решения в цели числа x и y.

Решение:

уравнение	сравнение по модул	Лявата страна	Дясна страна
$x^2 + y^2 = 2003$	4	0, 1 или 2	3
$12x + 5 = y^2$	3	2	0 или 1
$-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$	7		
$15x^2 - 7y^2 = 9$	5		
$x^2 - 5y + 3 = 0$	5		
$8x^3 - 13y^3 = 17$	13		

Задача 14. Да се докаже, че уравненията
$x^2 + y^2 + z^2 = 1999$;

$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 1999;$
нямат решения в цели числа x, y и z/ $x_1, x_2, \dots, x_{14}$. .

Решение:

уравнение	сравнение по модул	Лявата страна	Дясна страна
$x^2 + y^2 + z^2 \ = 1999$	8		
$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 1999$	16		

Задача 15. Да се докаже, че уравнението

$$x^4 - y^4 = x^3 + y^3$$

няма решения в   естествени числа x и y .

Решение:

$$x^4 - y^4 = x^3 + y^3 \Leftrightarrow \frac{x^4 - y^4}{x + y} = \frac{x^3 + y^3}{x + y} \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 - xy$$

Уравнението няма решение, защото

$$(x - y)(x^2 + y^2) > x^2 + y^2 > x^2 + y^2 - xy.$$

Задачи за самостоятелна работа

Задача 16. Да се докаже, че уравнението

$$x^2 + y^2 \ = 2023$$

няма решение в цели числа x и y.

Задача 17. Да се реши уравнението

$$x! + 58 = y^2$$

в цели числа x и y.