Формулите на Виет за алгебрични уравнения

Франсоа Виет е роден на 11 октомври 1540 година във Фонтен ле Конг, Франция.
По образование е юрист. От 19-годишен се занимава с адвокатска практика в родния си град.
Преподавайки на дъщерята на един от своите клиенти, се увлякъл по астрономията и математиката.
Франсоа Виет бил съветник на кралете Анри III и Анри IV. От 1584 до 1589 година се посветил на изследвания в областта на математиката.
Виет въвел буквените означения и създал символната алгебра. Виет въвел понятието„коефициент“. Неговите съчинения по математика са били малко познати по време на неговия живот, тъй като ги е раздавал само на свои близки и познати. Те са били събрани от учителя по математика Шутен и издадени от Мерсен и Александър Андерсон през 1646 година. Към постиженията на Виет се отнасят: теорията на уравненията; изследване на измененията на трансцендентните функции; решаването на алгебрични уравнения; представянето на числото π във формата на безкрайно произведение на квадратни корени.

Франсоа Виет умира през 1603 година.

Формулите на Виет:

За квадратното уравнение:

Ако x_1, x_2 са корени на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$ тогава

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), a \neq 0$ и $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1.x_2 = \frac{c}{a}.$

Дадено	Формули на Виет	Доказателство
$ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$ x_1, x_2 са корени	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ $\Rightarrow b = -a(x_1 + x_2); c = ax_1x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1.x_2 = \frac{c}{a}$
$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ $a_0 \neq 0$ x_1, x_2 са корени	$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_0}$ $x_1.x_2 = \frac{a_2}{a_0}$	

За кубично уравнение

Ако x_1, x_2, x_3 са корени на кубичното уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0,$ тогава $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ и

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{c}{a}, x_1x_2.x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Дадено	Формули на Виет	Доказателство
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $a \neq 0$ x_1, x_2, x_3 са корени	$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$ $x_1x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{c}{a}$ $x_1x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$	$ax^3 + bx^2 + cx + d =$ $= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ $ax^3 + bx^2 + cx + d =$ $= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3)x - a.x_1.x_2.x_3$ $\Rightarrow$ $b = -a(x_1 + x_2 + x_3);$ $c = a(x_1x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3)$ $d = a.x_1.x_2.x_3$ $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$ $x_1x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{c}{a}$ $x_1x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$
$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ $a_0 \neq 0$ x_1, x_2, x_3 са корени	$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$ $x_1x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{a_2}{a_0}$ $x_1x_2.x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$	

Формули на Виет за уравнение от *n* – та степен:

Нека $x_1, x_2, \dots, x_n,$ са корени на уравнението

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-1} + \boldsymbol{a_3}x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + \boldsymbol{a_n} = 0, \quad a_0 \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

За тях е изпълнено

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{\boldsymbol{a_2}}{a_0}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_{n-1}x_n + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{\boldsymbol{a_3}}{a_0}$$

....

$$x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n = (-1)^n \frac{\boldsymbol{a_n}}{a_0}$$

ЗАДАЧИ, В КОИТО СЕ ПРИЛАГАТ ФОРМУЛИТЕ НА ВИЕТ

Задача 1. (*Г. Паскалев*) Да се намерят стойности на реалния параметър m, за които корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $x^2-2mx-m^2-1=0$ са такива, че

$$|x_1|=2|x_2|.$$

Решение:

От $x_1.x_2=-m^2-1<0 \Rightarrow$ корените на уравнението са с различни знаци.

Тогава

$$|x_1|=2|x_2| \iff x_1=-2x_2\,.$$

$$x_1+x_2=\begin{cases}-2x_2+x_2=-x_2\\ 2m\end{cases} \Rightarrow x_2=-2m, x_1=4m,$$

$$x_1.x_2=\begin{cases}(-2m)4m=-8m^2\\ -m^2-1\end{cases} \Rightarrow -8m^2=-m^2-1 \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Проверка!!!

Пресмятаме корените за всяка от стойностите на m и проверяваме дали са различни и дали

$|x_1|=2|x_2|$.

Отговор: $\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Задача 2.(*Софийски университет, 2019*) Да се намерят стойности на реалния параметър a, за които корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение

$$8a^2x^2+8ax-a+1=0$$

са различни и такива, че $5x_1-3x_2=1$.

Решение:

$$x_1+x_2=\begin{cases}x_1+\dfrac{5x_1-1}{3}=\dfrac{8x_1-1}{3}\\ -\dfrac{1}{a}\end{cases} \Rightarrow x_1=\frac{a-3}{8a}, x_2=\frac{-a-5}{8a};$$

$$x_1.x_2=\begin{cases}\left(\dfrac{a-3}{8a}\right)\left(\dfrac{-a-5}{8a}\right)=\dfrac{-a^2-2a+15}{64a^2}\\ \dfrac{-a-1}{8a^2}\end{cases} \Rightarrow a^2-6a-7 \Rightarrow a=7; a=-1.$$

Проверка!!!

Пресмятаме корените за всяка от стойностите на a и проверяваме дали са различни и дали

$5x_1 - 3x_2 = 1.$

Ако $a = -1$, корените са $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Получихме равни корени, а по условие те са различни.

Ако $a = 7$**,** корените са $x_1 = \frac{1}{14}, x_2 = -\frac{3}{14}$. Корените са различни и при това

$5x_1 - 3x_2 = 1.$

Търсената стойност на параметъра *а* е **7.**

Задача 3 (*изпит в университетите, 1976***).** Дадено е уравнението $x^2 - x - 1 = 0$, корените на което са x_1 и x_2.

Да се намерят коефициентите a, b и c на полинома $f(x) = ax^2 + bx + c$,

Ако $f(1) = 1$, $f(x_1) = x_2$ и $f(x_2) = x_1$.

Да се докаже, че числата 1, x_1 и x_2 са корени на уравнението $\varphi(x) = 0$, където

$$\varphi(x) = a.f^2(x) + b.f(x) + c - x.$$

Да се разложи на неразложими множители с реални коефициенти полинома $\varphi(x)$.

Решение:

$$\left|\begin{array}{c} a.1^2 + b.1 + c = 1 \\ a.x_1{}^2 + b.x_1 + c = x_2 \\ a.x_2{}^2 + b.x_2 + c = x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a.1^2 + b.1 + c = 1 \\ a.(x_1{}^2 - x_2{}^2) + b.(x_1 - x_2) = x_2 - x_1 \\ a.(x_1{}^2 + x_2{}^2) + b.(x_1 + x_2) + 2c = x_2 + x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a.1^2 + b.1 + c = 1 \\ a.(x_1 + x_2) + b = -1 \\ a.((x_1 + x_2)^2 - 2.x_2.x_1) + b.(x_1 + x_2) + 2c = x_2 + x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a + b + c = 1 \\ a + b = -1 \\ a.(1^2 - 2(-1)) + b + 2c = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} a + b + c = 1 \\ a + b = -1 \\ 3.a + b + 2c = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} c = 2 \\ a = -1 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Задача 4 (*изпит за колежите на Обединения свят, 2017***).**

Пресметнете стойността на израза

$$\frac{x_1^2 - 2}{x_1^2 + 3} + \frac{x_2^2 - 2}{x_2^2 + 3},$$

където x_1 и x_2 са корени на е уравнението $x^2 - 5x + 3 = 0$.

Решение:

Първи начин: От

$x_1{}^2 - 5.x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1{}^2 = 5.x_1 - 3;$

$x_2{}^2 - 5.x_2 + 3 = 0 \Rightarrow x_2{}^2 = 5.x_2 - 3.$

$$\frac{x_1^2-2}{x_1^2+3}+\frac{x_2^2-2}{x_2^2+3}=\frac{5.x_1-3-2}{5.x_1-3+3}+\frac{5.x_2-3-2}{5.x_2-3+3}=\frac{5.x_1-5}{5.x_1}+\frac{5.x_2-5}{5.x_2}=\frac{x_1-1}{x_1}+\frac{x_2-1}{x_2}$$

$$=\frac{x_1.x_2-x_2}{x_1.x_2}+\frac{x_1.x_2-x_1}{x_1.x_2}=\frac{2.x_1.x_2-(x_1+x_2)}{x_1.x_2}=\frac{6-5}{3}=\frac{1}{3}.$$

Втори начин:

$$\frac{x_1^2-2}{x_1^2+3}+\frac{x_2^2-2}{x_2^2+3}=\frac{x_1^2-2}{x_1^2+x_1.x_2}+\frac{x_2^2-2}{x_2^2+x_1.x_2}=\frac{x_1^2.x_2-2.x_2+x_2^2.x_1-2.x_1}{x_1.x_2.(x_1+x_2)}=$$

$$=\frac{x_1.x_2.(x_1+x_2)-2.(x_1+x_2)}{x_1.x_2.(x_1+x_2)}=\frac{3.5-2.5}{3.5}=\frac{1}{3}.$$

Задача 5. Един от корените на уравнението $x^3-6x^2+ax-6=0$ е 3.

Кои са другите два корена?

Решение:

Първи начин:

От формулите на Виет сборът на другите два корена е 3, а тяхното произведение е 2. Те са 1 и 2.

Втори начин:

3 е корен на уравнението

$\Longrightarrow\ 3^3-6.3^2+a.3-6=0\ \Longrightarrow a=11 \Longrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0$

	1	-6	11	-6
3	**1**	**-3**	**2**	0

$\Longrightarrow$ другите два корена на решение на $x^2-3x+2=0\ \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-8}}{2}$

Задача 6. Докажете, че уравнението $x^3+ax^2-b=0$, където a и b са реални числа и $b>0$, има точно един положителен корен.

Решение:

Първи начин:

Лявата част на уравнението за $x=0$ е отрицателното число $(-b)$, а при големи x е положително число, то уравнението има поне един положителен корен. Ако докажем, че няма други корени задачата ще е решена..

Да допуснем, че уравнението има три реални корена x_1, x_2, x_3.

От $x_1.x_2.x_3=b>0$, следва, че или един корен е положителен, или и трите корена са положителни. Но ако и трите корена са положителни, тогава

$$x_1x_2+x_1.x_3+x_2.x_3\neq 0.$$

Но съгласно формулите на Виет: $x_1x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = 0.$

Противоречие, откъдето следва че не е възможно трите корена са положителни.

Хайде, сега с „*Декарт*”!

Втори начин: С теоремата на Декарт:

$$x^3 + ax^2 - b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow +,-,- \Rightarrow 1 \text{ смяна } \Rightarrow 1 \text{ положителен корен} \\ a = 0 \Rightarrow x^3 - b = \left(x - \sqrt[3]{b}\right)\left(x^2 + x\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}\right). \\ a > 0 \Rightarrow +,+,- \Rightarrow 1 \text{ смяна } \Rightarrow 1 \text{ положителен корен} \end{cases}$$

Задача 7. И трите корена на уравнението $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ са положителни. За кои стойности (каква зависимост) на параметрите p, q и r с отсечките с дължини равни на корените на уравнението може да се построи триъгълник?

Решение: Нека x_1, x_2, x_3 са корени на уравнението. За да бъдат дължини на страните на триъгълник е достатъчно да е изпълнено условието

$(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3) > 0.$

(От $(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3) > 0 \Rightarrow$ или и трите множителя са положителни, или два от множителя са отрицателни, а третия положителен. Ако и трите множителя са положителни, тогава са изпълнени неравенствата на триъгълника. Ако допуснем че два от множителите са отрицателни, например

$-x_1 + x_2 + x_3 < 0$ и $x_1 - x_2 + x_3 < 0 \Rightarrow$ сборът им е отрицателно число, но тогава

$-x_1 + x_2 + x_3 + x_1 - x_2 + x_3 = 2x_3 < 0 \Rightarrow x_3 < 0$, противоречи с условието, че и трите корена са положителни)

Но

$(-x_1 + x_2 + x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 + x_2 - x_3) = (-p - 2x_1)(-p - 2x_2)(-p - 2x_3) =$

$= -p^3 - 2(x_1 + x_2 + x_3)p^2 - 4(x_1x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3)p - 8x_1.x_2.x_3 =$

$= -p^3 + 2p^3 - 4pq + 8r = p^3 - 4pq + 8r \Rightarrow$ условието е $p^3 - 4pq + 8r > 0$

Отговор: $p^3 - 4pq + 8r > 0$.

Т

Задача 8. Сборът на целите числа a, b и c е 0.
Докажете, че

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4$$

е точен квадрат.

Решение: Нека a, b и c са корени на уравнението

$x^3 + px + q = 0 \Longrightarrow x^3 = -px - q \Longrightarrow x^4 = -px^2 - qx \Longrightarrow$

$$2x^4 = -2px^2 - 2qx$$

$\Longrightarrow$

$2a^4 + 2b^4 + 2c^4 = -2p(a^2 + b^2 + c^2) - 6q(a + b + c) =$

$= -2p\big((a + b + c)^2 - 2(ab + ab + bc)\big) - 6q(a + b + c) =$

$= -2p\big(0 - 2(ab + ab + bc)\big) - 0 =$

$= 4p(ab + ac + bc) = 4p^2.$

Задача 9. Да се намери лицето на триъгълник, трите височини на който са корени на уравнението

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0.$$

Решение: Нека страните на триъгълник с лице S са x_1, x_2, x_3, височини към тях са съответно y_1, y_2, y_3.

По условие $y_1 = \frac{2S}{x_1}, y_2 = \frac{2S}{x_2}, y_3 = \frac{2S}{x_3}$ са корени на уравнението

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\left(\frac{2S}{x_1}\right)^3 - a\left(\frac{2S}{x_1}\right)^2 + b\left(\frac{2S}{x_1}\right) - c = 0 \Leftrightarrow (x_1)^3 - \frac{2bS}{c}(x_1)^2 + \frac{4aS^2}{c}x_1 - \frac{8S^3}{c} = 0;$$

$$\left(\frac{2S}{x_2}\right)^3 - a\left(\frac{2S}{x_2}\right)^2 + b\left(\frac{2S}{x_2}\right) - c = 0 \Leftrightarrow (x_2)^3 - \frac{2bS}{c}(x_2)^2 + \frac{4aS^2}{c}x_2 - \frac{8S^3}{c} = 0;$$

$$\left(\frac{2S}{x_3}\right)^3 - a\left(\frac{2S}{x_3}\right)^2 + b\left(\frac{2S}{x_3}\right) - c = 0 \Leftrightarrow (x_3)^3 - \frac{2bS}{c}(x_3)^2 + \frac{4aS^2}{c}x_3 - \frac{8S^3}{c} = 0.$$

Получихме, че x_1, x_2, x_3 са корени на уравнението

$$x^3 - \frac{2bS}{c}x^2 + \frac{4aS^2}{c}x - \frac{8S^3}{c} = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2)(x - x_2) = 0.$$

По Херонова формула

$$S = \sqrt{p(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)} = \sqrt{p(p^3 - \frac{2bS}{c}p^2 + \frac{4aS^2}{c}p - \frac{8S^3}{c})}$$

Тук трябва да отбележим, че

$$p = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} = \frac{\frac{2bS}{c}}{2} = \frac{bS}{c}.$$

Тогава

$$S = \sqrt{p\left(p^3 - \frac{2bS}{c}p^2 + \frac{4aS^2}{c}p - \frac{8S^3}{c}\right)} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow S^2 = \left(\frac{bS}{c}\right)^4 - \frac{2bS}{c}\left(\frac{bS}{c}\right)^3 + + \frac{4aS^2}{c}\left(\frac{bS}{c}\right)^2 - \frac{8S^3}{c}\frac{bS}{c}$$

$$\Rightarrow S^{-2} = \left(\frac{b}{c}\right)^4 - \frac{2b}{c}\left(\frac{b}{c}\right)^3 + + \frac{4a}{c}\left(\frac{b}{c}\right)^2 - \frac{8b}{c^2} \Rightarrow \; S = c^2\sqrt{\frac{1}{4ab^2c - b^4 - 8bc^2}}.$$

Задача 10. (*олимпиада в САЩ, 1984 г.*) Произведението на два от четирите корена на уравнението

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$

е -32. Да се намери *k*.

Решение:

Нека x_1, x_2, x_3, x_4 са корените на уравнението и $x_1.x_2 = -32$.

Тогава $x_3.x_4 = \frac{-1984}{x_1.x_2} = 62$.

Полагаме $x_1 + x_2 = a$ и $x_3 + x_4 = b$.

От формулите на Виет получаваме последователно

$$\left| \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ (x_1 + x_2).x_3.x_4 + (x_3 + x_4).x_1.x_2 = -200 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{c} a + b = 18 \\ 62a - 32b = -200 \end{array} \right. \Rightarrow a = 4, b = 14$$

$\Rightarrow$

$k = (x_1 + x_2).(x_3 + x_4) + x_1.x_2 + x_3.x_4 = 4.14 - 32 + 62 = 86.$

Задачи за самостоятелна работа

Задача 11. Да се докаже, че ако между коефициентите на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ съществува зависимостта $2b^2 - 9ac = 0$, единият му корен е два пъти по-голям от другия и обратно.

Задача 12. (*Унгария, „Йозеф Кюршак", 1983*) Нека

$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$

е полином с неотрицателни коефициенти $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ и уравнението $f(x) = 0$ има *n* реални корена. Да се докаже, че $f(2) \geq 3^n$.